МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ВСЕРОССИЙСКИЙ АГРАРНЫЙ КОЛЛЕДЖ ЗАОЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников средних профессиональных
учебных заведений по специальностям:
3102 «Агрономия», 3103 «Зоотехния», 3105 «Пчеловодство»,
3106 «Механизация сельского хозяйства»,
3107 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДЕПАРТАМЕНТ КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ВСЕРОССИЙСКИЙ АГРАРНЫЙ КОЛЛЕДЖ ЗАОЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«УТВЕРЖДЕНО»
Всероссийским аграрным
колледжем заочного образования

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников средних профессиональных
учебных заведений по специальностям:
3102 «Агрономия», 3103 «Зоотехния», 3105 «Пчеловодство»,
3106 «Механизация сельского хозяйства»,
3107 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»

СЕРГИЕВ ПОСАД
2003

Методические указания и контрольные задания составлены по программе, утвержденной Управлением среднего профессионального образования Минобразования России 27 мая 2002 г., и одобрены цикловой комиссией математических и общих естественнонаучных дисциплин Сальского сельскохозяйственного колледжа.

Составила **Г. И. Калашникова**, преподаватель Сальского сельскохозяйственного колледжа.

Рецензенты: **Т. Н. Исайкина, М. И. Прилука** преподаватели ССХК, **Е. Н.Широкова**, преподаватель ВАКЗО.

Ст. методист **Н. С. Шоль**
Методист **Н. В. Степанова**
Корректор **А. В. Козлова**

Компьютерная верстка А. С. Малышев

Формат 60×84 1/16 Сдано в набор 18.04.2003 г. Подп. в печать 04.05.2003 г.
Объем 4,0 п. л. Тираж 4500 экз. Заказ 778.

Отпечатано в Загорской типографии Московской области

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Математика – одна из самых важных фундаментальных наук. В эпоху компьютеризации значительно расширяется область применения теоретической и вычислительной математики.

Методические указания ставят своей целью оказать помощь студентам заочной формы обучения в организации самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений, навыков в объеме действующей программы. Студентам рекомендуется изучать материал по следующей методике:

1. Ознакомиться с содержанием программы, просмотреть рекомендуемые учебные пособия.
2. Выбрать 1—2 учебника по курсу или по теме в качестве основных.
3. Изучить материал по данным методическим указаниям, понять опорные термины, теоремы, запомнить формулы, разобраться в решениях тех задач, которые приводятся в данных указаниях к каждой теме.
4. Изучить соответствующий материал курса по учебнику, составить его конспект.
5. Ответить на вопросы и выполнить упражнения, приведенные в конце каждой темы данных методических указаний.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после овладения соответствующим материалом. При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольную работу выполняют в отдельной тетради школьного формата в клетку. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради должен быть приклеен титульный лист утвержденного образца и заполнен по форме.
3. Работу выполняют чернилами одного цвета, аккуратно, разборчиво.
4. Каждое задание выполняют с новой страницы.
5. Решения задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании.
6. Условия задач необходимо переписывать полностью в контрольную тетрадь.

7. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, аккуратно, соблюдая масштаб.
8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.
9. В конце работы следует указать список литературы, поставить дату выполнения и подпись.
10. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом-графиком.
11. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без рецензии.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Наименование разделов и тем	Кол-во часов при очной форме обучения	
	Всего	В том числе практических занятий
1	2	3
Введение **Раздел 1. Математический анализ**	**20**	**10**
Тема 1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление	10	4
Тема 1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения	4	2
Тема 1.3 Дифференциальные уравнения в частных производных	2	2
Тема 1.4 Ряды	4	2
Раздел 2. Основы дискретной математики	**6**	
Тема 2.1 Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами	4	
Тема 2.2 Основные понятия теории графов	2	
Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики	**8**	**6**
Тема 3.1 Вероятность. Теорема сложения вероятностей	4	2
Тема 3.2 Случайная величина, ее функция распределения	2	2
Тема 3.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	2	2
Раздел 4. Основные численные методы	**6**	**4**
Тема 4.1 Численное интегрирование	2	
Тема 4.2 Численное дифференцирование	2	2
Тема 4.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	2	2
Всего по дисциплине:	**40**	**20**

Рекомендуемая литература

Л–1. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2001.
Л–2. Данко И.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 . – М: Высшая школа, 1980.
Л–3. Данко И.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2 . – М: Высшая школа, 1980.
Л–4. Валуцэ И.И. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1989.
Л–5. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. – М.: Вузовская книга, 1998.
Л–6. Щипачев В.С. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 2001.
Л–7. Щипачев В.С. Задачи по высшей математике.– М.: Высшая школа, 2001.
Л–8. Рывкин А.А. и др. Справочник по математике. – М: Высшая школа, 1987.

Дополнительная литература

Л–9. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М: Высшая школа, 2002.
Л–10. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – С-Пб.: Лань, 2001.
Л–11. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.
Л–12. Пехлецкий И.Д. Математика. – М.: Мастерство, 2001.
Л–13. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1991.
Л–14. Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Высшая школа, 1999.
Л–15. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И. Математический анализ в вопросах и задачах.– М.: Физмат, 2000.

УЧЕБНОЕ ЗАДАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Студент должен **иметь представление**: о роли математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин и в профессиональной деятельности.

Литература: Л–3, с. 3…13; Л–1, с. 5…9.

Методические указания

Изучая тему, следует уяснить роль, место и значение математики в системе общепрофессиональных и специальных дисциплин, профессиональной деятельности, современном мире.

Слово «Математика» происходит от греческого слова «матема», что означает знание. Возникла математика на первых этапах создания человеческой культуры. За свою историю математика, которая развивалась в тесной связи с развитием производственной деятельности людей и общечеловеческой культуры, превратилась в стройную дедуктивную науку.

Академик А.П.Колмогоров выделил следующие четыре основных периода в истории развития науки.

Первый – период зарождения математики, начинается с глубокой древности и продолжается до VI-V в.в. до нашей эры. В этом периоде создается арифметика, а также зачатки геометрии.

Второй – период элементарной математики, то есть математики постоянных величин (VI-V в.в. до н. э. – XVII в н. э.).

Третий – период создания математики переменных величин (XVII в. – середина XIX в.).

Четвертый – период современной математики: теория алгебраических структур и геометрии Лобачевского.

Последние полвека отличаются широким использованием методов математического моделирования и ЭВМ, которые применяют в традиционных науках, в том числе механике, биологии, экономике и др. Математические методы необходимы также в решении конкретных задач, которые встречаются в ежедневной деятельности технических специальностей, технологов сельскохозяйственного производства (агрономии, зоотехнии, механизации, электрификации). Учебная дисциплина «Математика» является естественнонаучной, формирующей базовые знания для освоения общепрофессиональных и специальных дисциплин. Изучение математики для современного специалиста способствует формированию современного научного мышления, обогащению культуры труда и приобщению к вычислительной технике, техническим средствам, без использования которых труд специалиста немыслим в наши дни.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление

Студент **должен знать**: первый и второй замечательные пределы; определение производной, ее геометрический смысл; таблицу производных; формулы производных суммы, произведения, частного; основные методы интегрирования; таблицу простейших интегралов, формулу Ньютона-Лейбница; определение частной производной; свойства определенного и неопределенного интегралов.

Студент **должен уметь**: вычислять производные функции при данном значении аргумента; исследовать функции с помощью производной и строить графики; интегрировать простейшие определенные интегралы; вычислять площади плоских фигур; находить частные производные различных порядков.

Практические занятия. Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательного пределов. Исследование функций на непрерывность. Нахождение производных по алгоритму. Вычисление производной сложных функций. Интегрирование простейших функций. Вычисление простейших определенных интегралов. Решение прикладных задач. Нахождение частных производных.

Литература: Л–1, с. 69...209; Л–2, с. 150...236; Л–4, с. 172...180; Л–6, с. 25...156; Л–7, с. 36...116.

Методические указания

Ознакомьтесь с основными понятиями теории дифференциального и интегрального исчисления, изучите правила и формулы дифференциального и интегрального исчисления, разберите примеры нахождения производных и интегралов, алгоритм исследования функции и расчета формулы Ньютона-Лейбница, выполните контрольные задания.

Переменная и постоянная величины. Функция

Переменная – это величина, которая в условиях данного процесса может принимать различные значения.

Постоянная – это величина, которая в условиях данного процесса сохраняет одно и то же значение.

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита ($x, y, z, u, \ldots$), а постоянные – первыми ($a, b, c, d, \ldots$).

Величина y называется ***функцией*** переменной величины x, если каждому из тех значений, которые может принимать x, соответствует одно или несколько определенных значений y. Величина y зависит от величины x, соответственно, величина x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, y – ***зависимая переменная***, или ***функция***. Для обозначения функций используются буквы f, g, h и др. Например: $y = f(x)$; $y = F(x)$.

Совокупность всех значений, которые может принимать (в условиях данного процесса) аргумент x функции $f(x)$, называется ***областью определения*** этой функции.

Предел функции. Пусть дана функция $y = f(x)$.

Постоянное число A называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для всех x, сколько угодно мало отличающихся от a, то есть $(|x - a|<\delta)$, значение функции y сколько угодно мало отличается от числа A, то есть $(|y - A|<\varepsilon)$. То есть, если при $x \to a$, выполняется условие $y \to A$.

Теоремы о пределах

1. $Lim\,(x \pm y) = Lim\,x \pm Lim\,y$

Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

2. $Lim\,(x \cdot y) = Lim\,x \cdot Lim\,y$

Предел произведения равен произведению пределов.

3. $Lim\,(x / y) = Lim\,x / Lim\,y$

Предел отношения равен отношению пределов.

Свойства пределов

1. Lim A = A, если A = const.

Предел постоянной равен этой постоянной.

2. Lim c · y = c · Lim y, если c = const.

Постоянную можно вынести за знак предела.

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю *(Lim y = 0)*, то она называется ***бесконечно малой величиной***. Следовательно, выполняется равенство

$$Lim\ \frac{1}{\infty} = 0.$$

Если предел функции равен бесконечности *(Lim y = ∞)*, то есть величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется ***бесконечно большой величиной***. Выполняется равенство: $Lim\ \frac{1}{0} = \infty$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Предел отношения sin бесконечно малой величины к самой этой величине равен 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

Свойства:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, ax}{bx} = \frac{a}{b}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$;

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ ; \qquad \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \ ,$$

где e – число иррациональное, равняется приблизительно 2,71828.

Методы нахождения пределов функции

1. Простая подстановка значения аргумента. (см. примеры 1–3). Если при простой подстановке получаются неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то используются способы 2 и 3.
2. Числитель и знаменатель делятся на x с наибольшим показателем степени (см. пример 4).
3. Дробь раскладывается на множители, согласно правилам сокращенного умножения (см. пример 5).
4. Используются замечательные пределы (см. примеры 6 и 7).

Примеры:

1. $\lim\limits_{x \to -1}(x^3 - x^2 + 1) = -1 - 1 + 1 = -1$;

2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3}{2x-6} = \frac{3}{2 \cdot 3 - 6} = \frac{3}{0} = \infty$;

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{3x-6} = \frac{2}{3 \cdot \infty - 6} = \frac{2}{\infty} = 0$;

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 - x - 6}{3x - x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{10 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{3}{x} - 1} = -10$;

5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \frac{1}{-1} = -1$;

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \frac{3}{5}$;

7. $\lim\limits_{x \to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}} = \left(\lim\limits_{x \to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{\frac{3 \cdot 4}{5}} = e^{\frac{12}{5}}$;

Производная функции. Дана функция $y = f(x)$. Пусть x_1 и x_2 – два значения аргумента, $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значения функции $y = f(x)$.

Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется ***приращением аргумента***, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - (x_1)$ ***приращением функции*** на отрезке $[x_1, x_2]$.

Если $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, то $\Delta y = f(x + \Delta x) - y$; $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$,

тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Производной функции $y = f(x)$ по переменной x называется предел отношения приращения функции y к приращению аргумента x, когда Δx стремится к нулю

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Процесс нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Второй производной функции $y = f(x)$, или производной второго порядка, называется производная от ее производной. Обозначение y'' или $f''(x)$; $y'' = (f'(x))'$.

Геометрический смысл производной. Производная функции $f(x)$ в точке $x = a$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику данной функции в его точке с абсциссой $x = a$, то есть $y' = tg\,\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – угол наклона касательной к оси абсцисс. Уравнение касательной имеет вид: $y - y(x) = y' \cdot (x - a)$.

Дифференциал функции. Из определения производной имеем $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда величина $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Или, что то же самое:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = d(\Delta x),$$

где $d(\Delta x) \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$, тогда $\Delta y = f'(x)\Delta x + d(\Delta x)\Delta x$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции Δy, линейно зависящая от приращения аргумента Δx. Дифференциал обозначается символом dy.

Нахождение дифференциала функции называется ***дифференцированием***, также как и нахождение производной.

Производная сложной функции. Функция называется ***сложной***, если ее аргументом является другая функция. Пусть $y = f(u)$, где u – функция от x: $u = g(x)$, то $y = f(g(x))$ сложная функция. Производная сложной функции определяется по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Например: $y = (2x-4)^5$; $y' = 5(2x-4)^4(2x-4)' = 10(2x-4)^4$.

Формулы производных: Даны функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, которые имеют производные в точках. Для них справедливы следующие формулы:

сумма: $(u + v)' = u' + v'$,

разность: $(u - v)' = u' - v'$,

произведение: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$,

частное: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Таблица производных

1. $(c)' = 0,\ c = const$	9. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(cu)' = c \cdot u',\ c = const$	10. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	11. $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4. $(x)' = 1$	12. $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(e^x)' = e^x$	14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(Ln\,x)' = \dfrac{1}{x}$	15. $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
8. $(Log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	16. $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Задание. Найти производные функций.

Примеры:

1. $y = 3^x - 2x^5 + e^2$;

$y' = (3^x - 2x^5 + e^2)' = (3^x)' - 2(x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4$;

2. $y = 2^x \cdot x^3$

$y' = (2^x \cdot x^3)' = (2^x)' \cdot x^3 + 2^x \cdot (x^3)' = 2^x \ln 2 \cdot x^3 + 2^x \cdot 3x^2 = 2^x \cdot x^2 (x \ln 2 + 3)$

3. $y = \dfrac{x^2}{1+x}$

$$y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{(x^2)'(1+x) - x^2(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x(2+2x-x)}{(1+x)^2} = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2}$$

4. $y = 4x^5 - 3\sin x + 5\,ctg\,x$

$$y' = (4x^5 - 3\sin x + 5\,ctg\,x)' = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot \cos x - \frac{5}{\sin^2 x} =$$

$$= 20x^4 - 3\cos x - \frac{5}{\sin^2 x}$$

5. $y = (1 - x^4)^3$

$y' = ((1 - x^4)^3)' = 3(1 - x^4)^2 \cdot (1 - x^4)' = 3(1 - x^4)^2 \cdot (-x^4)' = -12x^3(1 - x^4)^2$

6. $y = \sqrt{1 + x^3}$

$$y' = \left((1+x^3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^3)' = \frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Задание. Найти производные функций при данном значении аргумента.

Примеры:

1. $y = 2x^3 - 5x^2 + 4, \quad y'(2)$

$y' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x = 6x^2 - 10x; \; y'(2) = 6 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 6 \cdot 4 - 20 = 4$

2. $y = 2 \cdot e^x + 3 \cdot \cos x, \; y'(0)$

$y' = 2 \cdot e^x + 3(-\sin x) = 2e^x - 3\sin x; \; y'(0) = 2e^0 - 3\sin 0 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2$

3. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x; \quad y'(0), y'(1), y'(-1)$

$y' = \dfrac{3}{3}x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$y'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1; \; y'(1) = 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0; \; y'(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4$

Исследование функций с помощью производных

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** при данном значении x, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если бесконечно малому приращению x соответствует бесконечно малое приращение y, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Функция $y = f(x)$ ***монотонно возрастает***, если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции $f(x)$. Условие возрастания функции на интервале [a, b]: $y' > 0$.

Функция $y = f(x)$ ***монотонно убывает***, если большему значению аргумента x соответствует меньшее значение функции. Условие убывания функции на интервале [a, b]: $y' < 0$.

Функция $y = f(x)$ имеет ***максимум (минимум)*** при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство:

$f(a) > f(x)$ – максимум

$f(a) < f(x)$ – минимум

Признаки максимума:

1. $f'(a) = 0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с плюса на минус (с возрастания на убывание).

Признаки минимума:

1. $f'(a) = 0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с минуса на плюс (с убывания на прибавление).

Говорят, что функция имеет ***экстремум*** в некоторой точке $x = a$, если она имеет в этой точке максимум или минимум.

Точки, в которых функция $f(x)$ достигает экстремума, называются ***критическими точками 1 рода***.

Функция $f(x)$ является ***выпуклой (вогнутой)*** в точки a, если при проведении касательной в точке a к кривой, соответствующей функции $f(x)$, все точки кривой, смежные с точкой касания a и лежащие по обе стороны от точки a, располагаются ниже (выше) касательной.

Признак выпуклости: $f'(x) < 0$.

Признак вогнутости: $f'(x) > 0$.

Точка a называется ***точкой перегиба***, если она является границей между выпуклостью и вогнутостью функции.

Признаки точки перегиба:

$$\begin{cases} f''(a) = 0; \\ f''(x) \text{ при переходе через } x = a \text{ меняет знак.} \end{cases}$$

Точки, в которых $f''(x) = 0$ (или бесконечности, или не существует), называются ***критическими точками 2 рода***,

Если при переходе через критическую точку 2 рода $f''(x)$ меняет знак, то $x = x_0$ – абсцисса точки перегиба.

Пример. Исследовать функцию $y = 3x^3 - x^4$ и построить график.

Решение:

1. Область определения функции – множество действительных чисел.
2. Находим точки пересечения графика с осями координат:

$$OX: y = 3x^3 - x^4 = x^3(3-x) = 0;\ y=0;\ x_1=3,\ x_2=0$$

$$OY: x=0;\ y=0.$$

3. Определяем знак функции $y = 3x^3 - x^4$ в интервалах оси OX

X	[–∞;0]	0	[0;3]	3	[3;+ ∞]
У	–	0	+	o	–

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

$$y' = 9x^2 - 4x^3 = x^2(9 - 4x) = 0;\ y' = 0;\ x_1=0\ x_2 = 2,25$$

X	[– ∞;0]	0	[0; 2,25]	2,25	[2,25; + ∞]
$У'$	+	0	+	0	—
$У$	↗	нет экстремума	↗	max	↘
$У$				8,54	

При $x = 2,25$ имеем $y_{max} = y(2,25) = 8,54$.

5. Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость

$$y'' = 18x - 12x^2 = 6x(3 - 2x) = 0;\ y'' = 0;\ x_1=0\ x_2 = 1,5$$

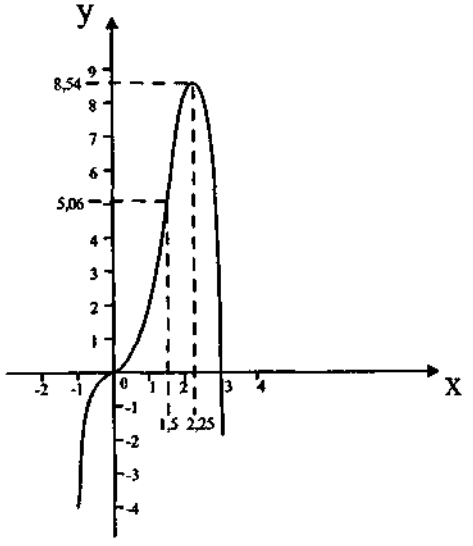
X	[–∞; 0]	0	[0; 1,5]	1,5	[1,5; + ∞]
$У''$	–	0	+	0	–
$У$	∩	точка перегиба	∪	точка перегиба	∩
$У$		0		5,0625	

Точки перегиба (0; 0); (1,5; 5,0625)

6. Находим дополнительные точки, произвольно задав значение x:

$$x = 1;\ y = 2;\ x = -1;\ y = -4$$

7. Построим график функции:



Неопределенный интеграл

Дифференцируемая функция $F(x)$, $a<x<b$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$, если $F'(x) = f(x)$ для каждого $a<x<b$.

Так, для функции $f(x) = cosx$ первообразной служит функция $F(x) = sinx$, поскольку $(sinx)' = cosx$.

Для заданной функции ее первообразная определяется неоднозначно. Если $F(x)$– первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $F(x)+C$, где C – любая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$ на этом промежутке. Обратно: каждая функция, являющаяся первообразной для $f(x)$ в данном промежутке, может быть записана в виде $F(x) + C$.

Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$ называют ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на этом интервале и пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; $f(x)$– подынтегральная функция; x – переменная интегрирования; C – произвольная постоянная.

Например: $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C$, так как $(tg\,x + C)' = \frac{1}{cos^2 x}$.

Если функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке хотя бы одну первообразную, то ее называют ***интегрируемой*** на этом промежутке. Можно доказать, что любая функция, непрерывная на отрезке $a \le x \le b$, интегрируема на этом отрезке.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \ ; \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, то есть $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)} + C \quad (n \ne -1)$
3. $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\,a} + C$
6. $\int sin\,x dx = -cos\,x + C$
7. $\int cos\,x dx = sin\,x + C$
8. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctg + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

Способы интегрирования

Под ***непосредственным*** интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти интеграл $\int \dfrac{3dx}{x^7}$.

Решение:

$$\int \frac{3dx}{x^7} = 3\int x^{-7}dx = \frac{3x^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{3x^{-6}}{-6} + C = \frac{-3}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + C = \frac{-1}{2x^6} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{2x\sqrt{x}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = dx\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{-1}{\sqrt{x}} + C.$$

Интегрирование методом подстановки

Пример 1. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}}$.

Решение. Производим подстановку $5 - 3x = t$, тогда $-3dx = dt$, откуда

$$dx = -\frac{1}{3dt}.$$

Далее получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3)^2}} = \int\frac{-\frac{1}{3dt}}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{3}\cdot t^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{1} + C = -\sqrt[3]{t} + C = -\sqrt[3]{5-3x} + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int (2+\cos x)^2 \sin x\,dx$.

Решение. Сначала положим $2+\cos x = t$, тогда $-\sin x\,dx = dt$, откуда $\sin x\,dx = -dt$.

Далее получаем:

$$\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = \int t^2 \cdot (-dt) = -\int t^2 dt = \frac{-t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \left(\cos\frac{x}{2}\right) dx$.

Решение. Положим $\frac{x}{2} = t$, тогда $\frac{1}{2}dx = dt$, откуда $dx = 2\,dt$.

Далее получаем:

$$\int \cos\frac{x}{2} dx = \int \cos t \cdot 2dt = 2\int \cos t \cdot dt = 2\sin t + C = 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

Интегрирование по частям

Общая формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где u и v – некоторые функции от x.

Пример. Вычислить интеграл $\int x \sin x\,dx$.

Решение. Обозначим $x = u$; $\sin x\,dx = dv$, находим du и v

$du = dx$; $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$, найдем

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \le x \le в$. Допустим, для простоты, что функция $f(x)$ в указанном промежутке неотрицательна и $a<в$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a = a_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = в$. На каждом из частичных отрезков $x_{i-1} \le x \le x_i$ (i = 1, 2, 3….n) возьмем произвольную точку c_i и составим сумму:

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \ldots f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Эта сумма носит название ***интегральной суммы функции f (x)*** на отрезке $a \le x \le в$.

Геометрически каждое слагаемое интегральной суммы равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, а вся сумма равна площади «ступенчатой фигуры», получающейся объединением всех указанных выше прямоугольников.

Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы длина наибольшего из отрезков $x_{i-1} \le x \le x_i$ стремилась к нулю. Во многих случаях при таком разбиении интегральная сумма будет стремиться к некоторому конечному пределу, не зависящему ни от способа, каким выбираются точки деления x_i, ни от того, как выбираются промежуточные точки c_i.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le в$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала. Он обозначается символом $\int_a^в f(x)dx$ и читается «интеграл от a до $в$ от функции $f(x)$ по dx» или, короче, «интеграл от a до $в$ от $f(x)\,dx$».

По определению, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Число a называется нижним пределом интегрирования, число $в$ – верхним; отрезок $a \le x \le в$ – ***отрезком интегрирования.***

Всякая непрерывная на отрезке $a \le x \le в$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Если интегрируемая на отрезке $a \le x \le в$ функция $f(x)$ неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^в f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = в$, то есть $S = \int_a^в f(x)dx$. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла

1) Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2) При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3) Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$ где a<c<b.

4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

5) Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Способы интегрирования

Непосредственное вычисление определенного интеграла. Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

то есть определенный интеграл равен разности значений любой преобразованной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Из этой формулы виден порядок вычисления определенного интеграла:

1) найти неопределенный интеграл от данной функции;
2) в полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний, затем нижний пределы интегрирования;
3) из результата подстановки верхнего предела вычесть результат подстановки нижнего предела.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx$.

Решение. Применив указанное правило, вычислим данный определенный интеграл:

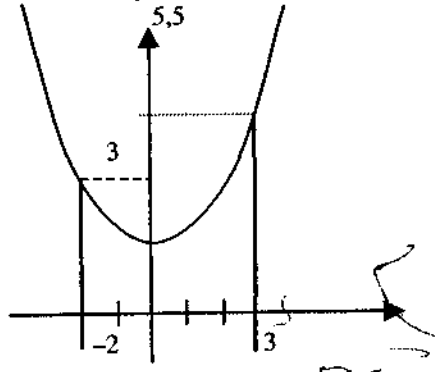
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}\left(4^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\cdot(16 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$$

Приложения интеграла к решению прикладных задач

Пример 1. Вычислить площадь земельного участка, если на плоскости он ограничен линиями:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1;\ y = 0;\ x = -2;\ x = 3$$

Геометрическое изображение фигуры:



Решение:

$$S = \int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx = \left(\frac{1}{6}x^3 + x\right)\Big|_{-2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{1}{6}3^3 + 3\right) - \left(\frac{1}{6}(-2)^3 - 2\right) = 10\frac{5}{6}$$

Площадь земельного участка составляет 10,83 (ед.)

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

$$y^2 = 4x;\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4.$$

Решение: $V = \pi\int_0^4 4xdx = 2\pi x^2\Big|_0^4 = 32\pi$. В решении использована формула $V = \int_a^b f^2(x)dx$.

Пример 3. Вычислить массу стержня, расположенного на отрезке *[0; 6]*, если плотность задается функцией $p(x) = 2x^2 + 3$.

Решение. Используем формулу $m = \int_a^b p(x)dx$, где $p(x)$ – плотность стержня.

$$m = \int_0^6 (2x^2 + 3)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + 3x\right)\Bigg|_0^6 = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 3 \cdot 6 = 162$$

Функции нескольких переменных

Если каждой паре значений переменных x и y (из некоторого множества) соответствует одно и только одно число z (действительное), то z называют ***функцией двух переменных.***

Обозначение: $z = f(x, y)$, где x, y – аргументы.

Аналогично для определения функции трех и более переменных.

Обозначение: $u = f(x, y, z)$.

Частной производной функции $Z = f(x, y)$ по переменной x называется ***выражение:***

$$Z_x^1 = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta x Z}{\Delta x}.$$

Обозначение: $\frac{dx}{dx}, \frac{df(x, y)}{dx}, f'x(x, y)$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная по переменной y.

Частные производные от функции нескольких переменных являются также функциями нескольких переменных, для которых можно найти частные производные, которые называются частными производными высшего порядка.

Примеры нахождения частных производных:

1. $Z = x^2 \cdot \sin y$; $\frac{dz}{dx} = 2x \cdot \sin y$; $\frac{dz}{dy} = x^2 \cdot \cos y$;

$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 \cdot \sin y$; $\frac{d^2z}{dy^2} = -x^2 \sin y$; $\frac{d^2z}{dxdy} = 2x \cdot \cos y$.

2. $Z = x^4 + x^3y^2 + y^5 + 5$; $\frac{dz}{dx} = 4x^3 + 3x^2y^2$; $\frac{dz}{dy} = 2x^3y + 5y^4$;

$\frac{d^2z}{dx^2} = 12x^2 + 6xy^2$; $\frac{d^2z}{dy^2} = 2x^3 + 20y^3$; $\frac{d^2z}{dxy} = 6x^2y$.

Контрольные задания

1. Найти производные следующих функций:

$y = 2x^5 + 4x - 1$ $\quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$

$y = 5e^x \cdot \sin x$ $\quad y = \frac{2x^3 + 5}{1 - x^2}$

$y = 8arctgx + 2e^x$ $\quad y = x^5 + 6\sin x$

2. Найти производные сложных функций:

$y = (2x^3 + 5)^4$ $\quad y = \sqrt{x^2 + a^2}$

$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ $\quad y = \frac{2t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}$

3. Исследовать функции с помощью производных и построить график:

$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ $\quad y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

4. Найти интеграл:

$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$ $\quad \int 3xe^x dx$

$\int \cos 3x \cdot \cos x\, dx$ $\quad \int ctg(2x + 5)dx$

5. Вычислить площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 3x - 1, y = 0, x = 2, x = 4$ б) $y = -x^2 + 6, y = 2x + 3$

1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Студент **должен знать:** типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям; определение дифференциального уравнения; определение общего и частного решения дифференциальных уравнений, их геометрической интерпретации; об интегральных кривых – решениях дифференциального уравнения; методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, дифференциальных уравнений первого порядка, дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Студент **должен уметь:** составлять дифференциальные уравнения на простейших задачах, решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными; решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка; решать однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практические занятия. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменами, однородных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение прикладных задач.

Литература: Л–1, с. 416…453; Л–3, с. 105…147; Л–4, с. 311…351; Л–7, с. 223…249.

Методические указания

Ознакомьтесь с типами задач, приводящими к дифференциальным уравнениям. Изучите разновидности обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрите способы решения различных дифференциальных уравнений, выполните контрольные задания. Закрепите знания и умения решением прикладных задач.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Решение различных задач методом математического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащей независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется дифференциальным.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в тождество.

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.

Пример. Опытным путем установлено, что скорость размножения бактерий в любой момент времени положительна и пропорциональна массе. Найти зависимость массы бактерий от времени.

Пусть $m(t)$ – масса бактерий в момент времени t, тогда $\frac{dm}{dt}$ – скорость размножения этих бактерий, которая пропорциональна массе $m(t)$ бактерий, поэтому $\frac{dm}{dt} = km(t)$, где $k > 0$. Это уравнение содержит функцию $m(t)$ и ее производную, поэтому является дифференциальным уравнением. Убедитесь, что любая функция вида $m(t) = C\,e^{kt}$ $(c - const)$ является решением дифференциального решения.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию, ее производную (или дифференциал аргумента и дифференциал функции).

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит только от одного независимого переменного.

Если дифференциальное уравнение содержит производную или дифференциал не выше первого порядка, то оно называется ***дифференциальным уравнением первого порядка.*** Общий вид такого уравнения $F(x, y, y') = 0$, где $y = f(x)$ – искомая неизвестная функция, $y' = f'(x)$ – ее производная по x, а F – заданная функция переменных x, y, y'.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$ от x и произвольной постоянной C, обращающая это уравнение в тождество по x.

Общее решение, записанное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$ называется ***общим интегралом.***

Частным решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении C: $y = \varphi(x, C_0)$, где C_0 – фиксированное число.

Частным интегралом уравнения $F(x,y,y')=0$ называется интеграл, полученный из общего интеграла при фиксированном значении C: $\Phi(x,y,C_0)= 0$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид такого уравнения: $X(x)Y(y)dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0$, где $X(x), X_1(x)$ – функции только от x, $Y(y), Y_1(y)$ – функции только от y.

Поделив обе части уравнения на произведение $X_1(x) \cdot Y(y) \neq 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C.$$

Замечание. Если произведение $X_1(x)\cdot Y(y) = 0$ при $x = a$ и $y = в$, то эти функции $x = a$ и $y = в$ являются решениями дифференциального уравнения при условии, что при этих значениях x и y уравнение не теряет числового смысла. Геометрически эти решения представляют собой прямые, параллельные осям координат.

Пример. Решить уравнение $ydy = xdx$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y = 4$ при $x = -2$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя, находим общее решение уравнения.

$$\int ydy = \int xdx; \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}.$$

Для получения более простого по форме общего решения постоянное слагаемое в правой части представлено в виде $\frac{C}{2}$, тогда $y^2 = x^2 + C$. Подставив в общее уравнение решение значения $y = 4$ и $x = 2$, получим 16 = 4 + C, откуда C = 12. Итак, частное решение уравнения, удовлетворяющее данному условию, имеет вид

$$y^2 = x^2 + 12.$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид $y' = f(x)y + q(x)$,

где $f(x)$ и $q(x)$ – заданные функции от x. Это уравнение является линейным относительно искомой функции и ее производной. Если $q(x) = 0$, то линейное дифференциальное уравнение называется ***однородным***. Оно имеет вид $y' = f(x)y$ и решается методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y; \qquad \frac{dy}{y} = f(x)dx;$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int f(x)dx \qquad ln|y| = F(x) + ln|C_1|;$$

$$|y| = |C_1|e^{F(x)}, \qquad y = \pm C_1 e^{F(x)}.$$

$y = Ce^{F(x)}$, где $F(x)$ – некоторая первообразная функция $f(x)$, а $C = \pm C_1$ – произвольная постоянная.

Линейное однородное уравнение может сводиться к уравнению с разделяющими переменными методом подстановки $y = v\cdot x$.

Пример. $(x + y)dx - x\,dy = 0$.

Предположим, $y = v\cdot x$, тогда $dy = xdv + vdx$. Подставляем значения y и dy в исходное уравнение.

$(x + vx)dx - x(xdv + vdx) = 0 \to xdx + vxdx - x^2dv - xvdx = 0 \to x\cdot d\,x - x^2dv = 0 \to dx - xdv = 0 \to$ – это уравнение с разделяющими переменными, решаемое по формулам:

$$dv = \frac{dx}{x} \to \int dv = \int\frac{dx}{x}, v = ln\,x + ln\,C \to v = ln(Cx).$$

Подставим значение v в подстановку $y = v\cdot x$. Имеем $y = x\,ln(Cx)$. Это общее решение дифференциального уравнения.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p, q – постоянные величины;

$f(x)$ – непрерывная функция от x.

Если $f(x) = 0$, то это уравнение называется ***уравнением второго порядка без правой части*** или ***линейным однородным уравнением***: $y'' + py' + qy = 0$. Для решения этого уравнения составляют характеристическое уравнение вида: $k^2 + pk + q = 0$. При решении характеристического уравнения возможны три случая.

№	Корни уравнения	Частные решения	Общее решение
1	Действительные различные ($k_1 \neq k_2$)	$y_1 = e^{k_1x}$ $y_2 = e^{k_2x}$	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
2	Действительные равные ($k_1 = k_2$)	$y_1 = e^{k_1x}$ $y_2 = xe^{k_1x}$	$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$
3	Комплексно-сопряженные ($\alpha \pm \beta i$)	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Пример 1. Найти общее решение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 5k + 6 = 0$ Решаем квадратное уравнение: $k_1 = 2$; $k_2 = 3$; $k_1 \neq k_2$ Частные решения $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$. Общее решение $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Пример 2. $y'' + 4y' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 4 = 0$ или $(k + 2)^2 = 0 \to k_1 = k_2 = -2$.

Частные решения: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$.

Общее решение: $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Приведите определение дифференциального уравнения первого порядка.
3. Решите дифференциальные уравнения и найдите частные решения, удовлетворяющие данным условиям.

   а) $x\,dy = y\,dx$; $y = 6$ при $x = 2$,

   б) $(x^2y + y)dy + (xy^2 + x)\,dx = 0$; $y = 1$ при $x = 0$.

Ответы: *а)* $y = Cx$, $y = 3x$; *б)* $(y^2 + 1)(x^2 - 1) = C$; $(y^2 + 1)(y^2 - 1) = -2$.

1.3 Дифференциальные уравнения в частных производных

Студент **должен знать:** методы решения дифференциальных уравнений с частными производными; методы решения дифференциальных уравнений первого порядка линейных относительно частных производных.

Студент **должен уметь:** решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных; решать дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных.

Практические занятия. Решение простейших дифференциальных уравнений линейных относительно частных производных.

Литература: Л–3, с. 237…256.

Методические указания

Ознакомьтесь с понятиями и видами дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрите методы решения простейших дифференциальных уравнений в частных производных. Выполните контрольные задания и решите прикладные задачи.

Дифференциальным уравнением в частных производных называется дифференциальное уравнение, содержащее неизвестные функции, зависящие от нескольких переменных. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка в частных производных:

$$F(x, y, z, Z'_x, Z'_y, Z''_{xx}, Z''_{xy}, Z''_{yy}) = 0.$$

Функция $Z = f(x, y)$, удовлетворяющая уравнению, называется ***решением или интегралом дифференциального уравнения в частных производных.*** Дифференциальное уравнение в частных производных может

иметь общее решение и частные решения, получаемые путем наложения дополнительных условий. В уравнениях в частных производных произвольные элементы общего решения, то есть решения, из которого получают все частичные решения (за небольшим исключением), являются не константами, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, а произвольными функциями. В общем случае число произвольных функций будет равно порядку дифференциального уравнения. В курсе «Высшая математика» рассматриваются типы уравнений ***n*** порядка и методы их решения. В частности, уравнение второго порядка в частных производных с двумя неизвестными имеет вид:

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + 2b\frac{d^2z}{dx \cdot dy} + c\frac{d^2z}{dy^2} + F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

где a, b, c – функции x и y, они принадлежат к гиперболическому, параболическому или эллиптическому типу. Для канонических уравнений этих типов составляют уравнения характеристик и находят общее решение. В этой работе рассмотрены простейшие дифференциальные уравнения в частных производных, общее решение которых находят простым интегрированием.

Пример. Найти функцию $Z = Z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{d^2z}{dy^2} = 6y$.

Решение. Дважды дифференцируем по y:

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 + \varphi(x), Z = y^3 + y \cdot \varphi(x) + \psi(x),$$

где: $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции.

Пример. Решить уравнение $\frac{d^2z}{dx \cdot dy} = 0$.

Решение. Интегрируем по x, имеем $\frac{dz}{dy} = f(y)$.

Интегрируем результат по y, имеем $Z = \varphi(x) + \psi(x)$,

где $\psi(x) = \int f(y)dy$

Дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно частных производных:

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z,$$

где X, Y, Z – функции x, y, z.

Предварительно решается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Решение этой системы определяется равенствами:

$$W_1(x,y,z)=C_1, \qquad W_2(x,y,z)=C_2.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения в частных производных:

$$\phi[W_1(x,y,z),W_2(x,y,z)]=0,$$

где: $\phi[W_1,W_2]$ произвольная непрерывно дифференциальная функция.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dx}=Z$.

Решение. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}, \text{ решая } \frac{dz}{x}=\frac{dy}{y}, \qquad \text{получим } \frac{y}{x}=c.$$

Решая $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$, имеем $\frac{z}{x}=C_2$.

Общий интеграл заданного уравнения: $\phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ или $\frac{z}{x}=\psi\left(\frac{y}{x}\right)$,

то есть $Z=x\cdot\psi\left(\frac{y}{x}\right)$,

где ψ – произвольная функции.

Контрольные задания

1. Найти общее решение уравнений

а) $\frac{d^2z}{dx\cdot dy}=1$ б) $\frac{d^4z}{dx^2dy^2}=0$

2. Найти общий интеграл уравнений

а) $yz\frac{dz}{dx}+xz\frac{dz}{dy}=xy$ б) $\frac{dz}{dx}\sin x+\frac{dz}{dy}\sin y=\sin z$

1.4 Ряды

Студент должен знать: определения числовых и функциональных рядов, необходимый и достаточный признаки сходимости рядов, признак Даламбера; признак знакопеременных рядов, признак Лейбница; метод представления функций в степенные ряды с помощью ряда Маклорена.

Студент должен уметь: определять сходимость числовых и функциональных рядов по признаку Даламбера; применять признак Лейбница для знакопеременных рядов; разлагать элементарные функции в ряд Маклорена.

Практические занятия. Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Определение сходимости знакопеременных рядов. Разложение функций в ряд Маклорена.

Литература: Л–1, с. 379…402; Л–3, с. 56…101; Л–4, с. 396…403.

Методические указания

Ознакомьтесь с теорией рядов в вопросах сходимости, видов рядов, признаков сходимости и разложения рядов. Разберите решенные примеры и выполните контрольные задания.

Числовым рядом называется выражение вида $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$,

где a_1, a_2, $\ldots a_n$... – числа, принадлежащие некоторой определенной числовой системе. Числа a_i могут быть действительными или комплексными, тогда ряды называются ***действительными*** или ***комплексными***.

Сокращенное обозначение ряда через знак суммирования $\sum$:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

где: числа a_1, a_2, ... a_n ..... называются ***членами ряда***; a_n – ***общим членом ряда***.

Индекс n может принимать значения $1, 2, \ldots$ или $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

Примеры рядов:

1. Ряд геометрической прогрессии

$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$, если $a=1$; $q=\frac{1}{2}$, то получим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

2. Ряд, составленный из чисел, обратных натуральным числам, называется гармоническим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Сумма первых n членов ряда называется ***частичной суммой ряда***.

Ряд называется ***сходящимся***, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел. Этот предел называется ***суммой сходящегося ряда.***

Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд называется ***расходящимся*** (он не имеет суммы).

Пример.

1. Ряд $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots$ имеет частичные суммы $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, … $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, которые имеют бесконечный предел. Ряд расходится.

2. Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots$ имеет частичные суммы.

$$S_1 = 1,\quad S_2 = 1\frac{1}{2}, S_3 = 1\frac{3}{4}, \ldots\ldots S_n = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots\ldots$$

Найдем предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=2$. Ряд сходится.

Свойства сходящихся рядов:

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равняется S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ – также сходится и его сумма равна $C \cdot S$.

2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S' и S'', то каждый из двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится и сумма каждого равна $S' \pm S''$.

Необходимое условие сходимости ряда:

Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не равен нулю или этот предел не существует, то ряд расходится.

Необходимое условие сходимости ряда не является достаточным.

Положительные и знакопеременные ряды

Положительным называется ряд, все члены которого неотрицательны. Частичные суммы положительного ряда имеют предел – конечный или бесконечный. В первом случае ряд сходится, во втором расходится. ***Знакопеременным*** называется ряд, который содержит как положительные, так и отрицательные члены. ***Знакочередующимся*** называется ряд, если его члены поочередно положительны и отрицательны.

Признак Даламбера для положительного ряда. Пусть дан положительный ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Найдем отношение последующего члена к предыдущему при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \text{ тогда}$$

1) если $q<1$, то ряд сходится;
2) если $q>1$, то ряд расходится;
3) если $q = 1$, тогда ряд может сходиться, а может расходиться.

Признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Знакочередующийся ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если:

1) его члены убывают по модулю $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$;
2) его общий член стремиться к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет условию $0 \leq S \leq a_1$.

Абсолютная и условная сходимость рядов. Знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + a_n + \ldots$ называется ***абсолютно сходящимся,*** если сходится ряд, составленный из модулей его членов, то есть сходится ряд:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots;$$

Ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется ***условно сходящимся,*** если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то есть расходится ряд:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

Функциональные ряды. Функциональным рядом называется выражение

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x),$$

где $U_1(x)$, $U_2(x)$,.... – члены ряда функции одного и того же аргумента x. Если аргументу x дать какое-либо числовое значение, то из функционального ряда получается числовой ряд.

Функциональный ряд называется ***сходящимся*** в точке $x = 0$, если числовой ряд, полученный из функционального подстановкой $x = a$, является сходящимся рядом. Точка a называется ***точкой сходимости ряда.***

Пример: $1 + x + x^2 \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Ряд сходится в точке $x = \frac{1}{2}$ и расходится в точке $x = 2$.

Функциональный ряд может сходиться при одних значениях x и расходиться при других. Совокупность значений x, при которых ряд сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда.***

Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами степенного ряда.***

Частичная сумма степенного ряда $S_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ является функцией переменной x, определенной в области сходимости ряда: $S = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

то ее можно представить в виде:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

который называется рядом Маклорена.

Примеры. Исследовать ряды на сходимость по признаку Даламбера.

1. Дан ряд: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

находим элементы $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Данный ряд сходится.

2. Дан ряд: $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Данный ряд расходится.

3. Дан ряд: $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n}{2n-1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2(n+1)-1} : \frac{n}{2n-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Признак Даламбера не дает ответа на поставленный вопрос о сходимости данного ряда.

$\lim_{m\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Ряд расходится.

4. Дан функциональный ряд: $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|Un+1(x)|}{|Un(x)|} = \lim_{m\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{m\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой.

Исследовать ряды на сходимость по признаку Лейбница.

5. Дан ряд: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$, имеем

а) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}...>\frac{1}{n}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

По признаку Лейбница ряд сходится.

6. Дан ряд: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+...$

Составим ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^{n-1}}...$, который является сходящимся, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}<1$. Следовательно, исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Разложить в степенной ряд Маклорена функции.

1. $f(x)=e^x$. Находим производные $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $f'''(x)=e^x$,... и так далее.

Положив $x=0$, находим $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=1$...

Имеем

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+...\frac{x^n}{n!}+...$$

2. $f(x)=\sin x$. Находим $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$,...

$f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$, $f^{VI}(x)=-\sin x$, $f^{VII}(x)=-\cos x$.

Положим $x=0$, имеем $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$

$$f^{IV}(x)=0,\quad f^{V}(x)=1,\quad f^{VI}(x)=0,\quad f^{VII}(x)=-1$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

Контрольные задания

1. Исследовать ряды по сходимости при помощи признака Даламбера

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n!}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

2. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{Ln(n)}$

4. Разложить в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости

а) $f(x)=x^2e^{-2x}$ б) $f(x)=\sin x^2$ в) $f(x)=Ln(1-x^2)$.

2. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

2.1 Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами

Студент **должен иметь представление**: о способах задания множеств; о диаграммах Эйлера.

Студент **должен знать**: понятия множества, отношения; операции и свойства операций над множествами; свойства отношений.

Литература: Л–6, с. 5…7; Л–8, с. 102…104.

Методические указания

Ознакомьтесь с основными понятиями теории множеств и операциями над множествами. Научитесь пользоваться диаграммами теории множеств.

Множеством называют совокупность, набор каких-либо объектов (предметов). Предметы, составляющие множество, называются его ***элементами***. Обозначение множеств: A, B, C, …, обозначение элементов множеств: a, $в$, c, … . Вхождение элемента во множество A обозначается $a\in A$. (Читается: a принадлежит множеству A). Если a не принадлежит множеству A, обозначается $a\notin A$. Термин ***множество*** употребляется независимо от количества элементов. Множество, не содержащее ни одного элемента, называются ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

Способы задания множеств.

1. Простое перечисление (множество деталей в коробке).
2. Указания характеристических свойств множества (количество четных чисел в интервале $1<x<20$).

Отношения множеств. Свойства отношений

1. $A=B$ означает, что множества A и B состоят из одних и тех же элементов.
2. Запись $A\subset B$ означает, что каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B или A ***подмножество*** в B.
3. Каждое непустое множество имеет по крайней мере два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само множество A.

4. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.
5. Если E определенное множество, содержащее в себе другие множества, то множество E называется ***универсальным***.
6. Если A некоторое подмножество универсального множества E, тогда множество $\bar{A}$ (не A), состоящее из всех элементов множества E, не принадлежащих множеству A, называется ***дополнением множества A.***

Перечисленные отношения наглядно иллюстрируются с помощью диаграмм Эйлера-Венна – замкнутых линий, внутри которых расположены элементы данного множества, а снаружи – элементы, не принадлежащие этому множеству.

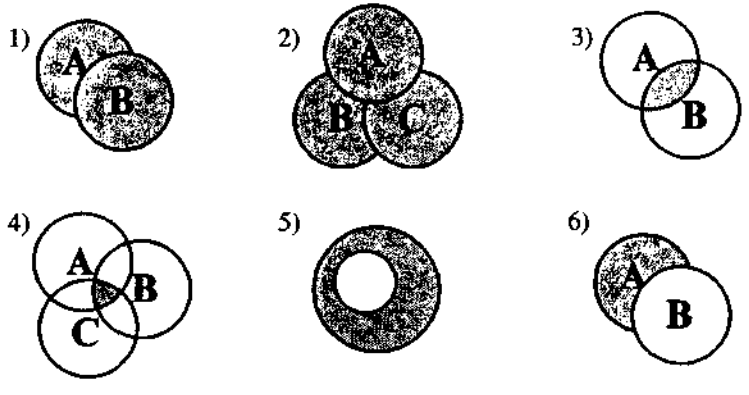
Операции над множествами

1. ***Объединением (суммой)*** двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A или множеству B. Обозначение: $C = A \cup B$.

2. ***Пересечением*** двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и множеству B. Обозначение: $A \cap B$.

3. ***Разностью*** двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов A, не входящих в B. Обозначение: $C = A \setminus B$.

Операции над множествами в диаграммах



Примеры 1, 3, 5, 6 – объединение, пересечение и разность двух множеств A и B.

Примеры 2, 4 – объединение и пересечение трех множеств A, B, C.

Свойства отношений над множествами

1. $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$ – ***переместительные законы*** объединения и пересечения множеств.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ***сочетательные законы*** объединения и пересечения множеств.
3. $A \cup \varnothing = A; A \cap \varnothing = \varnothing, A \setminus \varnothing = A, A \setminus A = \varnothing$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – ***распределительный закон пересечения*** относительно ***объединения;***

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – ***распределительный закон объединения*** относительно ***пересечения.***
5. $\bar{\bar{A}} = A, A \cup \bar{A} = E, A \cap \bar{A} = \varnothing, E \setminus A = \bar{A}, A \setminus E = \varnothing,$

   $A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup E = E, A \cap E = A$

Контрольные задания

1. Представьте в виде диаграммы результат операции между множествами A, B, C:

$$(A \cup B) \cup C \quad \text{и} \quad A \cup (B \cap C)$$

2. Пусть A – множество всех работников бригады, а B – множество всех работников 1-го разряда. Как представить множество остальных работников.

2.2 Основные понятия теории графов

Студент **должен иметь представление**: о связи понятия графов и понятия отношения.

Студент **должен знать**: определение графов и его элементов; виды графов и операции над ними.

Литература: Л–5, с. 173…222.

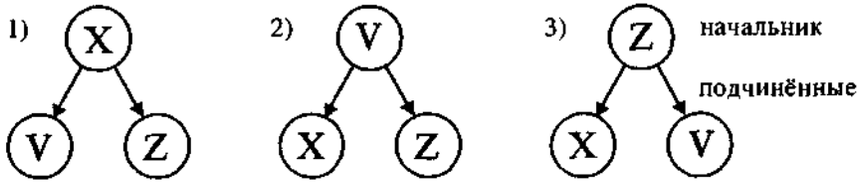
Методические указания

Ознакомьтесь с основными понятиями теории графов, изучите операции, выполняемые над графами. Научитесь составлять простейшие графы.

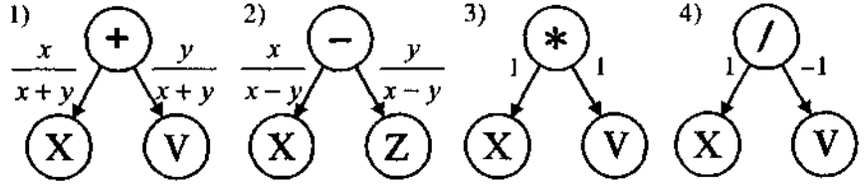
Граф – это конечная совокупность точек, называемых ***вершинами***, соединенных друг с другом линиями, называемыми ***ребрами графа***. Вершины и ребра – это элементы графа. Граф, в котором каждые две вершины соединены между собой, называется ***полным.*** Граф, в котором направление ребер указывается стрелками, называется ***направленным.*** Граф может видоизменяться: уменьшаться, увеличиваться, применяться несколько раз при решении одной и той же задачи. Граф характеризуется динамичностью, простотой чтения и быстротой запоминания в ходе работы с ним.

Граф обычно используют для отражения общего подхода к решению задачи.

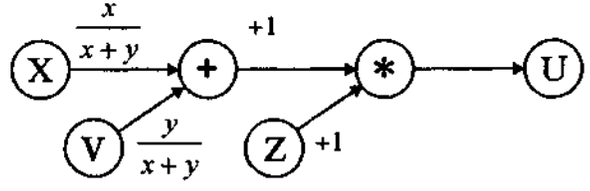
1. Граф, изображающий схему размещения объектов. Например, центральной усадьбы и четырех пчеловодческих пасек. Необходимо от центральной усадьбы (вершины) проложить возможные маршруты ко всем пчеловодческим пасекам с указанием вдоль ребер расстояния. Их будет 24. В конце каждого маршрута указывают сумму расстояний. Наименьшее расстояние есть оптимальный маршрут (критический путь).
2. Граф, отражающий решение логических (комбинаторных) задач, связанных с перебором вариантов. Например, задача о назначении на должность одного из трех человек. Возможны 3 варианта:



3. Граф, отражающий вычислительные процессы. В вершину (кружок) вписывают букву, цифру, операцию (+, -, *, /), вдоль стрелок – числовые характеристики, называемые коэффициентами. Такой граф может содержать различные операции: 1) сложение, 2) вычитание, 3) умножение, 4) деление.



Граф может располагаться сверху вниз и наоборот, слева направо и наоборот. При вычислении вначале выполняют операции первого уровня, потом второго и т. д. **Например:** x и y *(кг)* настриг шерсти с двух отар овец, $Z(\%)$ – забракованная часть шерсти. Выход чистой шерсти $u = (x + y) \cdot Z$. Граф расчета выхода чистой шерсти:



Контрольные задания

1. Изобразить с помощью графа, сколькими способами можно выбрать двух специалистов из четырех человек так, чтобы один из них был старшим специалистом.
2. Начертите граф вычислительного процесса для сложения $y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, причем $x_4 > x_3 > x_2 > x_1 > 0$.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1. Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Студент **должен знать** понятия: событие, частота и вероятность появления события, совместные и несовместные события, полная вероятность; теорему сложения вероятностей; теорему умножения вероятностей.

Студент **должен уметь**: находить вероятность в простейших задачах, используя классическое определение вероятностей; решать задачи с применением теоремы сложения вероятностей для несовместных событий.

Практические занятия. Решение простейших задач на определение вероятностей с использованием теоремы сложения вероятностей.

Литература: Л–3, с. 162…172; Л–4, с. 352…383.

Методические указания

Ознакомьтесь с основными понятиями теории вероятностей. Научитесь находить вероятность в простейших задачах и пользоваться теоремами сложения и умножения вероятностей. Выполните контрольные задания.

Случайные события. Вероятность события. Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерности в случайных событиях. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под ***испытанием*** (опытом) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – событие.

Случайным называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Слово «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие». Например, выстрел по цели – это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие в данных условиях называются ***достоверным***, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и ***невозможным***, если оно заведомо не произойдет. Например, выпадение не более шести очков при

бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадение 7 очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

События называются ***несовместными***, если никакие два из них не могут появляться вместе. Например, попадание и промах, при одном выстреле – это несовместные события.

События называются ***равновозможными,*** если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа – события равновозможные.

Говорят, что несколько событий в данном опыте образуют полную систему событий, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий. Пусть A – случайное событие, связанное с некоторым опытом. Повторим опыт n раз в одних и тех же условиях и пусть при этом событие A появилось m раз. Отношение $\frac{m}{n}$ ***называется частотой события*** A. При многократном повторении опыта частота события принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу. Числовая мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию A. ***Тогда вероятностью события A*** называют отношение m числа исходов, благоприятствующих событию A к числу всех исходов данного испытания: $P(A)=\frac{m}{n}$. Если A – случайное событие, то $m \le n$ и $P(A) \le 1$;

Эта формула носит название ***классического определения вероятности.*** Если B – достоверное (или невозможное) событие, то $m = n$ и $P(B) = 1$ ($m=0$, $P(B) = 0$). Таким образом, вероятность события заключается в следующих пределах: $0 \le P(A) \le 1$.

Независимость случайных событий. Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменит вероятности события B. Если событие B не зависит от события А, то и событие А не зависит от события В; это означает, что свойство независимости взаимно. Несколько событий называют попарно независимым, если каждые два события независимы.

Суммой $A + B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, то $A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах. Если события A и B

– несовместные, то $A + B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий. Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то AB – деталь годна и окрашена.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило. Условная вероятность события B при условии, что событие А уже наступило, по определению, равна:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (P(A)>0).$$

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое событие наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Примеры.

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

   Решение. $P=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}=0{,}1.$

2. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.

   Решение. Из чисел от 1 до 100 содержат число 5 девятнадцать чисел. Не содержит число пять – 81 число. Тогда $P=\frac{81}{100}=0{,}81.$

3. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара (красного или синего).

   Решение. Вероятность появления красного шара $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, синего шара: $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ События A и B несовместимы. Теорема сложения приемлема

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

4. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным $P(A)=\frac{3}{10}$. Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим, считая что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность: $P_A(B)=\frac{7}{9}$. По теореме умножения, искомая вероятность $P_A(B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Приведите примеры случайных величин.
3. Рассчитайте вероятность того, что из 10 шаров, помещенных в мешок, будет вытащен красный, если в мешке содержится 4 красных шара из 6 зеленых. Какова вероятность, что шар будет зеленым?
4. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область 0,45, во вторую 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает либо в первую, либо во вторую область.

3.2 Случайная величина, ее функция распределения

Студент **должен знать**: способы задания случайной величины; определения непрерывной и дискретной случайных величин; закон распределения случайной величины.

Студент **должен уметь**: строить ряд распределения случайной величины; находить функцию распределения случайной величины.

Практическое занятие. По заданному условию построить закон распределения дискретной случайной величины.

Литература: Л–3, с. 385…388; Л–4, с. 172…176.

Методические указания

Ознакомьтесь с понятиями случайной величины и их видами. Научитесь пользоваться законом распределения случайной величины на примерах конкретных задач.

Случайная величина. Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не

могут быть учтены. Например, число бракованных лампочек среди 10 купленных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значение: 0, 1, 2,…,10. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т.д., а их значения – соответствующими строчными буквами x, y, z и т.д.

Случайная величина называется ***дискретной***, если множество ее значений конечно или счетно, то есть множество ее значений представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2, \ldots x_n$ или бесконечную последовательность $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного множества. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задавать таблично, аналитически и графически. Табличное задание закона:

X	x_1	x_2		x_i		x_n
P	p_1	p_2		p_i		p_n

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ – возможности значения случайной величины X;

$p_1, p_2, \ldots p_n$ – вероятности случайной величины X.

События $X=x_1$, $X=x_2$, … $X=x_n$ – полная система попарно несовместимых событий, поэтому сумма их вероятностей равна 1.

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$$

Пример. В издательстве выпущено 100 книг по овцеводству. Лотереей разыграны одна книга в 500 руб. и 10 по 10 руб. Найти закон распределения случайной величины x – возможного выигрыша одной книги.

Решение. Возможны значения x: $x_1=500$, $x_2=10$, $x_3=0$. Вероятности: $p_1=0{,}01$; $p_2=0{,}1$; $p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}89$.

Закон распределения:

X	500	10	0
P	0,01	0,1	0,89

Функцией распределения случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, то есть $F(x)=P(X<x)$.

Контрольные задания

1. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появления шестерки.
2. Составить закон распределения вероятностей числа появления события А в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

3.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Студент **должен знать**: определение математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины; среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Студент **должен уметь**: находить математическое ожидание и дисперсию случайной величины по заданному закону ее распределения; находить среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Практическое занятие. Нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

Литература: Л–3, с. 389…395; Л–4, с. 176…179.

Методические указания

Ознакомьтесь с определениями математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины. Научитесь пользоваться формулами в решении конкретных задач.

Кроме закона распределения, который дает полное представление о случайной величине, часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины.*** К ним относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием (М) дискретной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений, умноженных на их вероятности.

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{I=1}^{\infty} x_I y_I ,$$

где x_i – значение случайной величины, p_i – вероятность случайной величины.

Часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг его среднего значения. ***Дисперсией (рассеянием)*** $D(x)$ случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M[X-M(X)]^2$.

Формула для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2)-[M(X)]^2$.

Свойства математического ожидания и дисперсии:

1. M(C) = C, c–const	1. D(C) = O, c–const
2. M(CX) = CM(X)	2. D(CX) = C^2D(X), c–const
3. M(XV) = M(X) • M(V)	3. D(X+V) =D(X) + D(V)
4. M(X+M) = M(X) + M(V)	4. D(X–V) = D(X) + D(V)

Средним квадратичным отклонением ***(σ (x))*** случайной величины x называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$.

Исследование вариационных статистических рядов рассмотрим на примере.

Дан дискретный вариационный ряд

X	1	4	6
N	10	15	25

Где $X\{x_1, x_2, x_3\}$– характеристики случайной величины X,

$N\{n1, n2, n3\}$ – частоты появления элементов в выборке.

Провести исследование дискретного вариационного ряда: 1) найти объём выборки, 2) составить закон распределения случайной величины X, 3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение. 1) Найдём объем выборки: $n = n_1+n_2+n_3=10+15+25=50$. 2) Найдём относительные частоты: $w_1=10/50=1/5$, $w_2=15/50=3/10$, $w_3=25/50=1/2$.

Закон распределения случайной величины X представлен таблицей:

X	1	4	6
W	1/5	3/10	1/2

3) Найдём математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$M=w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3=1/5 \cdot 1+3/10 \cdot 4+1/2 \cdot 6=4/4;$$

$$D= w_1(x_1-M)^2 + w_2(x_2-M)^2 + w_3(x_3-M)^2 =$$

$$=1/5 \cdot (1-4,4) +3/10 \cdot (4-4,4) +1/2 \cdot (6-4,4)=3,64;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3,64} =1,9$$

Контрольные задания

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины, зная закон ее распределения:

X	1	2	3	4
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2. Сравнить дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

X	– 1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42

Y	–1	1	2	3
P	0,19	0,51	0,25	0,05

4. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

4.1 Численное интегрирование

Студент **должен знать**: способы представления функций в виде прямоугольников и трапеций; формулу Симпсона; выражения для определения предельных абсолютных погрешностей.

Студент **должен уметь**: вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

Практическое занятие. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.

Литература: Л–3, с. 308…312; Л–4, с. 284…310.

Методические указания

Изучите вопросы представления функций через формулы численного интегрирования. Изучите формулы прямоугольников, трапеций, формулу Симпсона и оценку их погрешности. Научитесь вычислять интегралы по этим формулам. Выполните контрольные задания.

На практике часто встречаются интегралы, которые нельзя выразить через элементарные функции или выразить очень сложно. В этих случаях интегралы находят приближенными методами, в том числе с использованием методов численного интегрирования.

Промежуток интегрирования *(a,b)* делим точками *x0, x1, x2, ...x(n–1)* на *n* равных частей. Длина каждой $h = \frac{b-a}{n}$, где $a = x(0)$; $b = x(b)$.

Через *x (1/2), x (3/2), x (5/2...)* обозначим середины отрезков участков *(x0, x1), (x1, x2), ...* .

Полагаем $f(x(0)) = y(0)$; $f(x(1/2)) = y(1/2)$; $f(x(3/2)) = y(3/2)$ ...

Формулы прямоугольников:

1. $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y(0) + y(1) + \ldots + y(n-1)\right]$$

2. $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y(1) + y(2) + \ldots + y(n)\right]$$

3. $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y(1/2) + y(3/2) + \ldots + y((2n-1)/2)\right]$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{y(0)+y(n)}{2} + y(1) + y(2) + \ldots + y(n-1)\right]$$

Формула Симпсона (параболических трапеций):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left[\frac{y(0)+y(n)}{2} + y(1) + y(2) + \ldots + y(n-1) + \right.$$

$$\left. + 2(y(1/2) + y(3/2) + \ldots + y((n-1)/2)\right]$$

Абсолютная погрешность рассчитывается по формулам численного интегрирования (не более):

1. По формулам прямоугольников 1 и 2 $\frac{M1(в-a)^2}{2n}$
2. По формуле прямоугольников 3 $\frac{(в-a)^2}{24n^2} \cdot M2$
3. По формуле трапеций $\frac{M2(в-a)^3}{12n^2}$
4. По формуле Симпсона $\frac{M4(в-a)^5}{180(2n)^4}$,

где Mn – наибольшее значение производных соответственно $|f^n(x)|$ на отрезке *[a; b]*.

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формулам прямоугольника и трапеции, где $n = 10$. Оценить погрешность.

Решение: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$.

Составляем таблицу значений подынтегральной функции:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_i = \frac{1}{1+x_i^2}$	1	0,9901	0,9615	0,9174	0,8621	0,8000	0,7353	0,6711	0,6098	0,5525	0,5

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 7{,}0998; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 7{,}5998$$

По формуле прямоугольников 2:

$$I = 0{,}1 \cdot 7{,}5998 = 0{,}75998.$$

По формуле трапеций:

$$I = 0{,}1 \cdot (0{,}75 + 7{,}0998) = 7{,}8498.$$

Для оценки погрешности найдем

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \; f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

Наибольшее значение $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = 2$.

Абсолютная погрешность:

1. По формуле прямоугольников – 0,0029.
2. По формуле трапеций – 0,0017.

Контрольные задания

1. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)}$ по формулам прямоугольников 1 и по формуле Симпсона. Найти погрешность.
2. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ при n = 10 по формулам прямоугольников.

4.2 Численное дифференцирование

Студент **должен знать**: интерполяционные формулы Ньютона; таблицу конечных разностей.

Студент **должен уметь**: по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

Практическое занятие. Нахождение производных: функции в точке x по заданной таблично функции $y = f(x)$ методом численного дифференцирования.

Литература: Л–3, с. 304…308.

Методические указания

Ознакомьтесь с правилами интерполяции на основе формул Ньютона. Научитесь находить производные функции методом численного дифференцирования.

Интерполяция – это процесс определения для заданного аргумента x значения функции $y = f(x)$ по ее нескольким известным значениям.

Интерполяционная функция Ньютона. Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots$ значения некоторой функции $y = f(x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргумента $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (*т.е.* $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k = const$).

Разности первого порядка:

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \quad \ldots \quad y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$$

Разности второго порядка:

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0, \quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_2$$

Разности $(n+1)$-го порядка:

$$\Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 = \Delta^{n+1} y_0, \quad \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1 = \Delta^{n+1} y_1$$

Значение аргумента, функции и конечные разности образуют таблицу конечных разностей.

Последовательные подстановки в формулы разности дают:

$$y_n = (1+\Delta)^n y_0 = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0,$$

если n – любое число (n = t), то получим ***интерполяционную формулу Ньютона.***

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0,$$

так как $x = x_0 + th$, то есть $t = \frac{x - x_0}{h}$, то формула принимает вид

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots$$

Для оценки погрешности интерполяционных формул Ньютона используют формулу:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)...(t-n).$$

В разделах высшей математики приведены формулы приближенного дифференцирования в точке x, основанные на интерполяционных формулах Ньютона:

$$y_i' = \frac{1}{h}(\Delta y_i - \frac{1}{2}\Delta^2 y_i - \frac{1}{4}\Delta^3 y_i + ...)$$

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i + \frac{11}{12}\Delta^4 y_i .....)$$

Пример. Из таблицы найти значение y при $x = 3,1$, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, построить формулы приближенного дифференцирования. Найти производные и погрешность в их определении.

X	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

Решение. Составим таблицу разностей.

X	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	**13**	21	31	43	57
Δy		4	6	**8**	10	12	14
Δ^2y			2	2	**2**	2	2
Δ^3y				0	0	0	0

$x_0 = 3$, так как $x = 3,1$, $h = 1$. Тогда $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3,1-3}{1} 0,1$;

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_0;$$

$$y = 13 + 0,1 \cdot 8 + \frac{0,1(0,1-1)}{2} \cdot 2 = 13,71.$$

Интерполяционный многочлен для этой таблицы имеет вид ($x = 3,1$ и $y = 13,71$).

$$y = 3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2 = x^2 + x + 1.$$

Найдем приближенные значения y'_i и y''_i величин $y'(x_i)$ и $y''(x_i)$ $(h = 1)$:

$$y_i' = \frac{1}{h}\left(\Delta y_i - \frac{1}{2}\Delta^2 y_i\right) = \left(8 - \frac{1}{2} \cdot 2\right) = 7$$

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i\right) = (2 - 0) = 2$$

Погрешность при вычислении y'_i равна (t = 0,1)

$$|R(x)| \le \frac{\Delta^2 y_0}{2!} 0,1(0,1-1) = \frac{2}{2} \cdot 0,09 \approx 0,09$$

Сравним с аналитическим вычислением производных функций:

$y = x^2 + x + 1$; $y' = 2x + 1$; $x_i = 3,1$; $y(x) = 2 \cdot 3,1 + 1 = 7,1$

Расчеты верны.

Контрольные задания

Составить таблицу конечных разностей, приближенно вычислить значения функции и ее производных в точке x = 2,2. Найти погрешность, если функция задана таблицей:

X	1	3	5	7	9	11
У	–4	–16	4	104	332	736

4.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Студент **должен знать**: метод Эйлера для решения задачи Коши.

Студент **должен уметь**: находить значение функции, определяемое заданным дифференциальным уравнением и начальными условиями с использованием метода Эйлера.

Практическое занятие. Нахождение значения функции с использованием метода Эйлера.

Литература: Л–1, с. 425…431; Л–3, с. 146…47.

Методические указания

Ознакомьтесь с правилами численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений на примере метода Эйлера. Научитесь находить значение функции с использованием метода Эйлера.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ определяет на плоскости поле направлений, то есть в каждой точке плоскости, в которой существует функция $f(x,y)$, задано направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Пусть требуется решить задачу Коши, то есть найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Разделим отрезок $[x_0\ X]$ на n равных частей и положим $\frac{X - x_0}{n} = h$ (h – шаг изменения аргумента). Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до $x_0 + h$ функция y' сохраняет постоянное значение $f(x_0, y_0)$. Тогда $y_1 - y_0 \approx h \cdot f(x_0, y_0)$, где y_1 – значение искомой функции, соответствующее значению $x_1 = x_0 + h$. Отсюда получаем $y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции:

$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$, $y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$, $y_{k+1} \approx y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$.

Таким образом, можно приближенно построить ***интегральную кривую*** в виде ломанной с вершинами

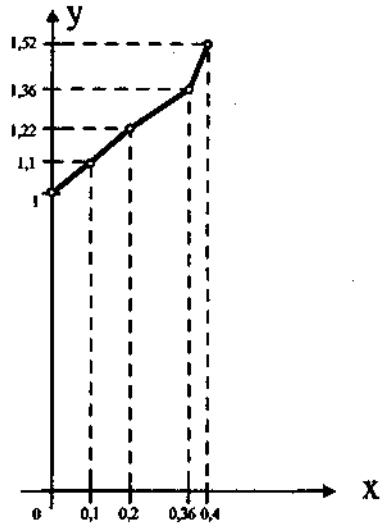
$$M_k(x_k;\ y_k),\ где\ x_{k+1} = x_k + \Delta x_k,\quad y_{k+1} = y_k + hf(x_k;\ y_k).$$

Этот метод называется методом ломанных Эйлера, или просто ***методом Эйлера.***

Пример. Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0,1$.

Решение. Значения аргумента $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$ $x_3 = 0,3$ подставляем в формулы последовательных значений функции и получаем таблицу, по которой можно построить интегральную кривую.

x	y
0	1
0,1	1,1
0,2	1,22
0,36	1,36
0,4	1,52



Контрольные задания

Методом Эйлера найти значения функций y:

1. $y' = 1 + x + y^2$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$
2. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0$; $h = 0,1$
3. $y' = y^2 + \frac{y}{x}$; $y(2) = 4$; $h = 0,1$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа содержит задания, номера которых указаны в таблице распределения контрольных заданий по вариантам (см. Приложение). Работу выполняют по двум последним цифрам шифра.

Задания контрольной работы

Задания 1 – 20.

Движение тела на плоскости задано функцией $y = f(x)$. Изучить траекторию движения тела, то есть:

1. Исследовать функцию $y = f(x)$. 2. Построить график функции $y = f(x)$.

1. $y = x^3 - 3x^2$
2. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$
3. $y = (x-1)^2(x+2)$
4. $y = \frac{(x-1)^2(x+4)}{4}$
5. $y = x^3 - 3x$
6. $y = \frac{x^2}{3} + x^2$
7. $y = 12x - x^3$
8. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
9. $y = (x-4)^2(x-5)$
10. $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$
11. $y = x^4 - 8x^2 - 9$
12. $y = x^4 - 2x^2 + 5$
13. $y = x^3 - x$
14. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
15. $y = (x+1)^2(x-2)$
16. $y = 3x - x^3$
17. $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$
18. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$
19. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4$
20. $y = -2x^2 + 4x$

Задания 21 – 26.

Найти производные функций при заданном значении аргумента.

21.а) $y = x^2 - \frac{1}{2x^2}$; $y' = (2), y'(-2)$ б) $y = \frac{x}{2x-1}$; $y' = (0), y'(2)$

22.а) $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$; $y'(0)$ б) $y = \frac{\ln x}{x}$; $y' = (2), y'(e^2)$

23. а) $y = x \ln x$; $y' = (1), y'(e)$ б) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$; $y' = (0), y'(-1)$

24.а) $y = (2x^3+1)(4x-1)$; $y' = (0), y'(2)$ б) $y = \frac{1}{3}x^3 - x$; $y' = (0), y'(2)$

25.а) $y = (x-1)(x^3+2)$; $y' = (1), y'(2)$ б) $y = x^2 e^x$; $y' = (0)$

Задания 26 – 30.

Найти производные сложных функций.

26. а) $y = \sqrt{1-x^2}$ б) $y = \ln(1+\cos x)$

27. а) $y = e^{tg\,x}$ б) $y = 2\sin 5x - \cos 2x$

28. а) $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$ б) $y = tg(x^2+3)$

29. а) $y = \sin^2 x^3$ б) $y = \ln tg 5x$

30. а) $y = \ln \sin x$ б) $y = tg^3 x - 3tgx + 3x$

Задания 31 – 40.

В следующих уравнениях найти:

1) общее решение дифференциальных уравнений;
2) частные решения уравнения по начальным условиям.

31. $xy' - y = 0$ $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$

32. $yy' + x = 0$ $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$

33. $x^2 y' + y^2 = 0$ $y_0 = 1$ при $x_0 = -1$

34. $xy' + y = 0$ $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$

35. $y' = y$ $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$

36. $2y'\sqrt{x} = y$ $y_0 = 1$ при $x_0 = 4$

37. $(2x+1)dy + y^2 dx = 0$ $y_0 = 1$ при $x_0 = 4$

38. $(1+e^x)y\,y' = e^x$ $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$

39. $2\sqrt{y}dx = dy$ $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$

40. $xy' = \frac{y}{\ln x}$ $y_0 = 1$ при $x_0 = e$

Задания 41 – 50.

Найти общее решение: а) линейных дифференциальных уравнений;

б) линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

41. а) $y' - y = e^x$ б) $y'' - 5y' + 4y = 0$

42. а) $y' = x + y$ б) $y'' - 6y' + 9y = 0$

43. а) $xy' + y = e^x$ б) $y'' + 8y' + 25y = 0$

44. а) $xy' + 2y = x^2$ б) $y'' - 3y' + 2y = 0$

45. а) $y' = x + y$ б) $y'' - 4y' + 4y = 0$

46. а) $y' - \frac{3y}{x} = x$ б) $y'' - 2y' + 2y = 0$

47. а) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$ б) $y'' - 4y' + 3y = 0$

48. а) $y' - ytgx = ctgx$ б) $y'' + y = 0$

49. а) $xy' + y = l_n x + 1$ б) $y'' + 2y' + 5y = 0$

50. а) $xy' + y = 3$ б) $y'' + 4y' = 0$

Задания 51 – 60.

а) Разложить в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости функций; б) исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера.

51. а) $y = x^2 e^{-2x}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

52. а) $y = \sqrt{1+x^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

53. а) $y = \sqrt[3]{27+x}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

54. а) $y = sin^2 x$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

55. а) $y = sin\, x^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3}$

56. а) $y = \frac{1}{1+x^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

57. а) $y = \frac{1}{2+3x^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$

58. а) $y = \frac{1}{1-x^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$

59. а) $y = sin\, x^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3}$

60. а) $y = ln(1+5x)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

Задания 61 – 70.

Всхожесть семян есть случайная величина. Исследования всхожести семян методом выборки представлены таблицей, в которой $X\ \{x_1, x_2, x_3\}$ – характеристики случайной величины, $N\ \{n_1, n_2, n_3\}$ – частота появления характеристик выборки. Провести исследование выборки:

а) найти объем выборки; б) составить закон распределения случайной величины X; в) найти выборную среднюю дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

61

X	2	4	9
N	10	20	30

62

X	1	5	8
N	8	16	40

63

X	4	7	10
N	10	5	15

66

X	1	3	7
N	8	10	6

67

X	3	8	10
N	20	10	15

68

X	2	6	7
N	8	12	10

64

X	6	10	20
N	20	10	30

65

X	2	4	5
N	8	7	6

69

X	1	4	7
N	20	15	10

70

X	1	5	7
N	3	8	4

Задания 71 – 80. Решить задачи теории вероятностей.

71. В ящике 30 яблок: 10 красных, 15 желтых и 5 незрелых. Наудачу извлекается яблоко. Найти вероятность извлечения зрелого (красного или желтого) яблока.

72. Ветеринарный участок получает пакеты с контрольными пробами из хозяйств А, В и С. Вероятность получения пакета из хозяйства А – 0,7, из хозяйства В – 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из хозяйства С.

73. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

74. Из слова «пчеловодство» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это будет буква «о».

75. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 радиоламп. В первом ящике – 8, во втором – 7, в третьем – 9 стандартных радиоламп. Найти вероятность того, что все три вынутые лампы окажутся стандартными.

76. Исследуются две группы откормочного поголовья свиней: первая – 10 голов (из них 8 с высокими привесами), вторая – 15 голов (из них 12 с высокими привесами). Из каждой группы наудачу взяты по одному животному. Найти вероятность того, что оба животных окажутся с высокими привесами.

77. Три работника участвуют в стрижке овец. Вероятность выполнения работы без брака первого работника 0,75, второго – 0,8, третьего – 0,9. Найти вероятность того, что все три работника выполнят работу без брака.

78. Вероятность выхода станка из строя в течение одного рабочего дня равна 0,01. Какова вероятность того, что за 5 дней станок ни разу не выйдет из строя.

79. Среди 50 электроламп – 4 бракованных. Какова вероятность того, что две взятые наугад электролампы окажутся бракованными?

80. В ремонтной мастерской 14 слесарей и 16 токарей. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность того, что выберут двух токарей?

Задания 81 – 90.

Опытный участок представлен криволинейной трапецией, ограниченной параллельными сторонами и верхним основанием в виде ломаной линии, выраженной функцией $y = f(x)$, ($a \le x \le b; f(x) \ge 0$).

Определить площадь опытного участка способами:

а) приближенного вычисления (прямоугольника, трапеции при $n=10$),

б) точных расчетов (по формуле Ньютона-Лейбница).

Вычислить погрешности в расчетах:

а) абсолютную,

б) относительную.

Вариант	$f(x)$	Способ	Вариант	$f(x)$	Способ
81	$I = \int_0^4 x^2\,dx$	Трапеций	86	$I = \int_1^2 dx/x$	Трапеций
82	$I = \int_0^1 dx/x$	Прямоугольника	87	$I = \int_0^1 2x\,dx$	Прямоугольника
83	$I = \int_0^1 dx/(1+x)$	Трапеций	88	$I = \int_1^2 3x\,dx$	Трапеций
84	$I = \int_0^1 (1+x^2)\,dx$	Трапеций	89	$I = \int_0^1 (2+x)\,dx$	Прямоугольника
85	$I = \int_0^1 (1+x)\,dx$	Прямоугольника	90	$I = \int_0^1 x^2\,dx$	Прямоугольника

Задания 91 – 99.

Найти значение функции (четыре значения), определяемое дифференциальным уравнением $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(0)$, с шагом h, используя метод Эйлера.

91. $y' = \frac{y-x}{y+x}$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$

92. $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$

93. $y' = 1 + x + y^2$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$

94. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0$; $h = 0,1$

95. $y' = y^2 + \frac{y}{x}$; $y(2) = 4$; $h = 0,1$

96. $y' = y^2 + x$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$

97. $y' = y + 1$; $y(0) = 1$; $h = 0,2$

98. $y' = y - \frac{2x}{y}$; $y(0) = 1$; $h = 0,2$

99. $y' = \frac{y}{x} + 0,5y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$

Таблица распределения контрольных заданий по вариантам

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1, 30, 40, 51, 63, 81	2, 29, 39, 52, 62, 82	3, 28, 38, 53, 68, 83	4, 27, 37, 54, 66, 84	5, 26, 36, 55, 72, 85	6, 25, 35, 56, 74, 86	7, 24, 34, 57, 76, 87	8, 23, 33, 58, 78, 88	9, 22, 32, 59, 80, 87	10, 21, 31, 60, 69, 89
1	11, 24, 41, 60, 64, 99	12, 23, 42, 59, 61, 98	13, 22, 43, 58, 67, 97	14, 21, 44, 57, 65, 96	15, 30, 45, 51, 71, 95	16, 29, 46, 52, 73, 94	17, 28, 47, 53, 75, 93	18, 27, 48, 54, 77, 92	19, 26, 49, 55, 79, 91	20, 25, 50, 56, 70, 90
2	10, 21, 31, 54, 61, 81	9, 22, 32, 53, 63, 82	8, 23, 33, 51, 65, 83	7, 24, 34, 52, 67, 84	6, 25, 35, 60, 69, 85	5, 26, 36, 59, 71, 86	4, 27, 37, 58, 73, 88	3, 28, 38, 57, 75, 89	2, 29, 39, 56, 78, 90	1, 30, 40, 55, 80, 91
3	11, 27, 50, 53, 62, 92	12, 26, 49, 55, 64, 93	13, 25, 48, 60, 66, 94	14, 24, 47, 54, 68, 95	15, 21, 46, 51, 70, 96	16, 22, 45, 59, 72, 97	17, 23, 44, 56, 74, 98	18, 28, 43, 57, 76, 99	19, 29, 42, 58, 77, 81	20, 30, 41, 52, 79, 82
4	19, 30, 32, 51, 61, 83	17, 28, 34, 52, 62, 84	15, 26, 36, 53, 63, 85	13, 24, 38, 54, 64, 86	11, 22, 40, 55, 65, 87	9, 29, 42, 56, 66, 88	7, 28, 44, 57, 67, 89	5, 26, 46, 58, 68, 90	3, 24, 48, 59, 69, 91	1, 22, 50, 60, 70, 92
5	20, 29, 31, 55, 70, 81	18, 27, 33, 56, 69, 82	16, 25, 35, 51, 68, 83	14, 23, 37, 53, 67, 99	12, 21, 39, 52, 66, 98	10, 30, 41, 57, 65, 97	8, 27, 43, 58, 64, 96	6, 25, 45, 59, 63, 95	4, 23, 47, 60, 62, 94	2, 21, 49, 54, 61, 93
6	1, 30, 40, 58, 71, 84	2, 29, 39, 56, 72, 85	3, 28, 38, 54, 73, 86	4, 27, 37, 51, 74, 87	5, 26, 36, 52, 75, 88	6, 25, 35, 56, 76, 89	7, 24, 34, 53, 77, 90	8, 23, 33, 56, 78, 91	9, 22, 32, 57, 79, 92	10, 21, 31, 60, 80, 93
7	20, 27, 41, 57, 71, 94	19, 26, 42, 55, 72, 95	18, 21, 43, 53, 73, 96	17, 22, 44, 52, 74, 97	16, 23, 45, 51, 75, 98	15, 24, 46, 60, 76, 99	14, 25, 47, 54, 77, 81	13, 28, 48, 55, 78, 82	12, 29, 49, 58, 79, 83	11, 30, 50, 59, 80, 84
8	3, 21, 31, 60, 64, 85	1, 22, 32, 59, 61, 86	7, 23, 33, 58, 68, 87	5, 24, 34, 57, 70, 88	9, 25, 35, 56, 65, 89	13, 26, 36, 55, 80, 90	11, 27, 37, 54, 78, 91	15, 28, 38, 53, 76, 92	17, 29, 39, 52, 74, 93	19, 30, 40, 51, 71, 94
9	4, 21, 41, 53, 63, 95	2, 22, 42, 54, 62, 96	8, 23, 43, 55, 67, 97	6, 24, 44, 52, 69, 98	10, 25, 45, 51, 66, 99	14, 26, 46, 58, 79, 81	12, 27, 47, 59, 77, 82	16, 28, 48, 60, 75, 83	18, 29, 49, 57, 73, 84	20, 30, 50, 56, 72, 85

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания 3
Примерный тематический план 4
Рекомендуемая литература 5
Учебное задание. Введение 5
1. Математический анализ 6
2. Основы дискретной математики 37
3. Основы теории вероятностей и математической статистики 41
4. Основные численные методы 47
Контрольная работа 55
Приложение 62